Narzędzia i metody rozwiązywania zadania sterowania optymalnego

Marcin Kwiatkowski

14 stycznia 2018

Spis treści

1 Optymalizacja statyczna i dynamiczna 3

1.1 Optymalizacja statyczna 3

1.2 Optymalizacja dynamiczna 3

2 Rachunek wariacyjny 5

2.1 Zadania wariacyjne dla przypadku jednowymiarowego 5

2.2 Zadania wariacyjne wielowymiarowe-funkcja kary, mnożniki Lagrange'a 6

3 Zasada maksimum Pontryagina, funkcja Hamiltona 7

4 Zasada optymalności Bellmana 8

4.1 Funkcja Bellmana 8

4.2 Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana HJB 8

4.3 Programowanie dynamiczne sterowania optymalnego z czasem ciągłym 9

5 Regulator liniowo kwadratowy (LQR) 10

6 Źródła 10

Wstęp

Idea sterowania optymalnego
W sterowaniu optymalnym poszukuje się takiego sterowania dla danego układu, przy którym spełnione zostaną pewne kryteria optymalności. Problem sterowania ujmuje funkcjonał kosztów, który jest funkcją stanu i zmiennych związanych ze sterowaniem. Przedstawia się układ równań różniczkowych opisujących przebiegi zmiennych związanych ze sterowaniem. Zmienne te minimalizują funkcjonał kosztów.Dopuszczalny proces sterowania ekstremalizujący wskaźnik jakości nazywa się optymalnym procesem sterowania, a związane z nim sterowanie nazywa się sterowaniem optymalnym. Różne potrzeby praktyczne prowadzą do wyróżnienia szczególnych zadań sterowania optymalnego np. zadania optymalnego sterowania docelowego, zadania optymalnego sterowania okresowego, czy też zadania optymalnego sterowania stochastycznego.

1 Optymalizacja statyczna i dynamiczna

1.1 Optymalizacja statyczna

Optymalizacja statyczna sprowadza się do poszukiwania ekstremum funkcji tj.

$$f : A \to R \; gdzie \; A \subset R^n$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu takiej wartości $x^* \in A$, że dla każdego $x \in A \setminus \{x^*\}$ zachodzi:

$$f(x) > f(x^*)$$

1.2 Optymalizacja dynamiczna

Optymalizacja dynamiczna sprowadza się do poszukiwania ekstremum funkcjonału. Chodzi o znalezienie takiej funkcji $x^*(t)$ ze zbioru dopuszczalnego X, że dla każdej funkcji $x(t) \in X$ zachodzi:

$$Q\{x^*(t)\} \leq Q\{x(t)\}$$

Podstawowe zadanie optymalnego sterowania docelowego polega na minimalizacji całkowego wskaźnika jakości

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt$$

z uwzględnieniem równań stanu procesu

$$\dot{u}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad t \in [t_0, t_1],$$

warunków dwugranicznych

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1,$$

oraz ograniczeń chwilowych sterowania

$$u(t) \in U, \; t \in [t_0, t_1],$$

Przykładowe kryteria

• Sterowanie minimalnoczasowe

$g(x(t), u(t),)t = 1$

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} 1dt = t_k - t_0$$

• Sterowanie minimalnoenergetyczne

$g(x(t), u(t),)u^2(t)$

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)dt$$

• Całka z kwadratu stanu i sterowania

$$G(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u)dt$$

• Problem ze swobodnym stanem końcowym

$$G = F(x(t_k))$$

2 Rachunek wariacyjny

2.1 Zadania wariacyjne dla przypadku jednowymiarowego

Sprowadzamy problem optymalnego sterowania do zminimalizowania funkcjonału zależnego od krzywej x, jej pochodnej $\dot{u}$ i czasu t

$$\tilde{G}(x) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{g}(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

z więzami ustalającymi położenie początkowe i końcowe krzywej

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1$$

Zakładamy, że krzywa jest elementem przestrzeni funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły tj.

$$x \in C_1([t_0, t_1]; R^n),\ \|x\| = \max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)| + \max_{[t\in t_0,t_1]} |\dot{x}(t)|$$

Funkcjonał $\tilde{G}(x)$ osiąga na krzywej $\hat{x}$ lokalne minimum jeżeli istnieje takie $\varepsilon > 0$(otoczenie w przestrzeni krzywych), że

$$(\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon) \Rightarrow (\tilde{G}(x) \geq \tilde{G}(\hat{x}))$$

tj. dla wszystkich krzywych z C_1 - otoczenia krzywej $\hat{x}$ wartości funkcjonału $\tilde{G}(x)$ nie są mniejsze od $\tilde{G}(\hat{x})$.
Warunkiem koniecznym słabego lokalnego minimum funkcjonału $\tilde{G}(x)$ jest spełnieni równania Eulera-Lagrange'a na krzywej ekstremalnej $\hat{x}$.
Krzywe spełniające równanie Eulera-Lagrange'a nazywamy ekstremalami. Aby stwierdzić czy dana ekstremala stanowi minimum funkcjonału (a nie maksimum lub punkt przegięcia) stosujemy warunki optymalności wyższych rzędów. W szczególności warunki optymalności drugiego rzędu uzyskujemy obliczając drugą pochodną.

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{G}}(\alpha)}{d\alpha^2}|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\hat{\tilde{g}}_{xx}(t)\delta x^2(t) + 2\hat{\tilde{g}}_{x\dot{x}}(t)\delta x(t)\delta\dot{x}(t) + \hat{\tilde{g}}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\delta\dot{x}^2(t))dt$$

Wynika stąd, że warunkiem koniecznym drugiego rzędu osiągania minimum przez ekstremalę $\hat{x}$ jest nierówność Legendre'a

$$\hat{\hat{g}}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0,\ t \in [t_0, t_1].$$

Warunkiem dostatecznym drugiego rzędu osiągania minimum przez ekstremalę $\hat{x}$ jest ostra nierówność Legendre'a

$$\hat{\hat{g}}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0,\ t \in [t_0, t_1].$$

pod warunkiem, że ekstremala nie posiada tzw punktów sprzężonych.

2.2 Zadania wariacyjne wielowymiarowe-funkcja kary, mnożniki Lagrange'a

Niech chwilowe ograniczenia sterowania będą postaci

$$|u(t)| \leq u^{max},\ t \in [t_0, t_1].$$

Wprowadzamy funkcję kary za przekroczenie ograniczeń chwilowych

$$K_j(u_j(t)) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |u_j(t)| \leq u_j^{max} \\ p_j|u_j(t) - u_j^{max}|^2 & \text{gdy } |u_j(t)| > u_j^{max} \end{cases}$$

gdzie $p_j > 0$ jest współczynnikiem kary. Wraz ze wzrostem współczynnika kary $p_j \to +\infty$ funkcja kary staje się coraz bardziej stroma i tym samym coraz dokładniejsza.
Stosując metodę funkcyjnych mnożników Lagrange'a $\lambda(t)$ dla równań stanu i funkcję kary $K(u(t)) = \sum_{j-1}^{m} K_j(u_j(t))$ dla ograniczeń chwilowych sterowania włączamy te ograniczenia do wskaźnika jakości modyfikując go do postaci

$$\tilde{G}(x, \lambda, u) = \int_{t_0}^{t_1} (g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) + K(u(t)))dt$$

Warunki konieczne optymalności w postaci układu równań Eulera-Lagrange'a

$$\hat{\hat{g}}_z(t) - \frac{d}{dt}\hat{\hat{g}}_{\dot{z}}(t) = 0,\ t \in [t_0, t_1], \qquad (*)$$

$$\hat{\hat{g}}_\lambda(t) - \frac{d}{dt}\hat{\hat{g}}_{\dot{\lambda}}(t) = 0,\ t \in [t_0, t_1], \qquad (**)$$

$$\hat{\hat{g}}_u(t) - \frac{d}{dt}\hat{g}_{\dot{u}}(t) = 0,\ t \in [t_0, t_1], \qquad (***)$$

Mnożnik funkcyjny $\lambda(t)$ nazywany jest także zmienną sprzężoną lub zmienną kostanu (wektorem kostanu). Równanie (*) nazywane jest równaniem sprzężonym lub równaniem kostanu optymalnego, równanie (**) jest równaniem stanu optymalnego, zaś (***) jest równaniem sterowania optymalnego. Układ tych równań pozwala dla niektórych klas problemów sterowania optymalnego efektywnie sparametryzować sterowanie optymalne.

3 Zasada maksimum Pontryagina, funkcja Hamiltona

$$\dot{u}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad t \in [t_0, t_1],$$
$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t)dt$$

Przyjmujemy następujące założenia:
1. Funkcje g i f są różniczkowalne w sposób ciągły względem stanu x i ciągłe względem sterowania u i czasu t,
2. Sterowania dopuszczalne są funkcjami przedziałami ciągłymi o skończonej liczbie nieciągłości pierwszego rodzaju, tj. $u \in PC[t_0, t_1]R^m)$.
Dla pochodnych funkcji g i f względem stanu stosujemy oznaczenia

$$g_x(x, u, t),\ f_x(x, u, t),$$

Funkcja Hamiltona (hamiltonian)

$$H(\lambda(t), x(t), u(t), t) = -g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)f(x(t), u(t), t).$$

Oznaczając iloczyn skalarny wektorów $x^T y$ jako $\langle x, y\rangle$ możemy zapisać hamiltonian w postaci równoważnej

$$H(\lambda(t), x(t), u(t), t) = -g(x(t), u(t), t) + \langle \lambda(t), f(x(t), u(t), t)\rangle.$$

Zasada maksimum Pontryagina, warunek konieczny optymalności
Jeżeli (x^*, u^*) jest optymalnym procesem sterowania, to sterowanie u^* maksymalizuje hamiltonian problemu tj.

$$H(\lambda^*(t), x^*(t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} H(\lambda^*(t), x^*(t), u(t), t)$$

gdzie $\lambda^*(t)$ (tzw. funkcja sprzężona) spełnia równanie różniczkowe (tzw. sprzężone)

$$\lambda'^*(t) = -f_x^T(x^*(t), u^*(t), t) + g_x^T(x^*(t), u^*(t), t)$$

z warunkiem końcowym

$$\lambda^*(t_k) = 0.$$

4 Zasada optymalności Bellmana

Jeżeli optymalną trajektorią z punktu A do punktu D jest trajektoria

$$A \to B \to C \to D,$$

to optymalną trajektorią z punktu B do punktu D jest trajektoria

$$B \to C \to D.$$

(tzn. końcówka trajektorii optymalnej jest optymalna sama w sobie, strategia optymalna nie zależy od historii procesu).

4.1 Funkcja Bellmana

$$S(x(t), t) \triangleq \min_{t \in U[t,t_1]} \int_t^{t_1} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau,$$

przy warunku $x(t_k) = x_k$
Funkcja $S(x(t), t)$ określa jaki jest najmniejszy możliwy koszt dotarcia do stanu końcowego x_k w chwili t_k, jeżeli w chwili t obiekt znajduje się w stanie $x(t)$.

4.2 Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana HJB

$$S(x(t), t) \triangleq \min_{t \in U[t,t_1]} \left(\int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right)$$

po rozwinięciu funkcji $S(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ w szereg Taylora względem punktu $S(x(t), t)$ i przejęciu $\Delta t \to 0$ otrzymuje się równianie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

$$-S_t(x(t), t) = \min_{u(t)\in U}(g(x(t), u(t), t) + S_x(x(t), t)f(x(t), u(t), y)$$

gdzie

$$S_t(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}S(x(t), t) \qquad i \qquad S_x(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial x}S(x(t), t)$$

Jest to tzw. równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (równanie HJB), które stanowi warunek konieczny optymalności procesu sterowania. Równanie to stanowi podstawę, na której określana jest metoda programowania dynamicznego dla problemów optymalnego sterowania z czasem ciągłym.

4.3 Programowanie dynamiczne sterowania optymalnego z czasem ciągłym

Minimalizując prawą stronę równania HJB wyznacza się sterowanie w funkcji stanu x, pochodnej funkcji Bellmana $S_x(x, t)$ i czasu t

$$u^*(x, S_x(x, t), t),$$

przy czym wielkości $x, S_x(x, t), t)$ traktowane są jako parametry; realizacja tego punktu wymaga rozwiązania zadania optymalizacji funkcji wielu zmiennych z ograniczeniami i z parametrami
Funkcję u^* podstawia się do równania HJB redukując je do, ogólnie biorąc, nieliniowego równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$-S_t(x, t) = g(x, u^*(x, S_x(x, t), t), t) + S_x(x, t)f(x, u^*(x, S_x(x, t), t), t)$$

z warunkiem granicznym

$$S(x, t_1) = 0.$$

Rozwiązuje się zredukowane równanie HJB (analitycznie lub numerycznie) określając w ten sposób sterowanie optymalne w układzie ze sprzężeniem zwrotnym

$$u^*(x, t) \triangleq u^*(x, S_x(x, t), t).$$

5 Regulator liniowo kwadratowy (LQR)

Dla liniowego systemu czasu ciągłego określonego na przedziale $t \in [t_0, t_1]$ równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

kwadratowa funkcja kosztów

$$G = \underbrace{x^T(t_k)F(t_k)x(t_k)}_{koszt\ stanu\ końcowego} + \int_{t_0}^{t_k} \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt$$

sterowanie, ze sprzężeniem zwrotnym minimalizujące koszt, określone jest przez równanie

$$u(t) = -Kx(t)$$

gdzie

$$K = R^{-1} B^T P(t),$$

zaś $P(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego Riccatiego

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -P'(t),$$

z warunkiem brzegowym

$$P(t_k) = F(t_k).$$

6 Źródła

- R. Bellman, Adaptacyjne procesy sterowania, PWN, Warszawa, 1965
- http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/krystyn.styczen/teoria_sterowania/
- http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/grzegorz.mzyk/spc/
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Sterowanie_optymalne
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Regulator_liniowo-kwadratowy